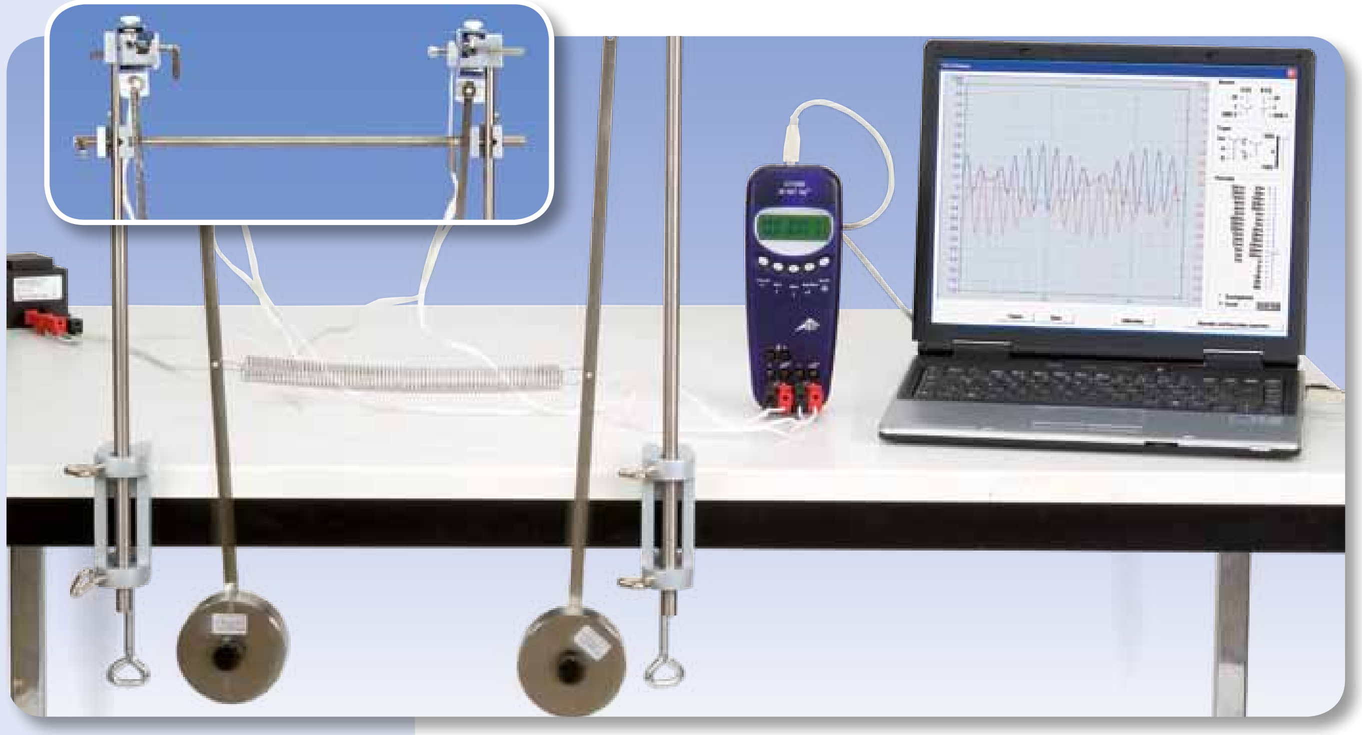
OSCILLATIONS COUPLEES



EXERCICES

- **Enregistrement de l'oscillation en phase et détermination de la période d'oscillation T_+.**
- **Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase et détermination de la période d'oscillation T_-.**
- **Enregistrement d'une oscillation couplée et détermination de la période d'oscillation T ainsi que de la période de battement T_Δ.**
- **Comparaison des valeurs mesurées avec celles obtenues à partir des périodes d'oscillation propres T_+ et T_-.**

OBJECTIF

Enregistrement et évaluation des oscillations de deux pendules identiques couplés

RESUME

L'oscillation entre deux pendules identiques couplés peut être caractérisée par la période d'oscillation et la période de battement. La période de battement représente l'écart entre deux moments où un pendule oscille à une amplitude minimum. Les deux grandeurs peuvent être calculées à partir des deux périodes de battement propres pour l'oscillation en phase et l'oscillation en opposition de phase et des pendules couplés.

DISPOSITIFS NECESSAIRES

Nombre	Appareil	Référence
2	Pendule avec capteur de déplacement (230 V, 50/60 Hz)	1000763 ou
	Pendule avec capteur de déplacement (115 V, 50/60 Hz)	1000762
1	Ressort cylindrique 3,0 N/m	1002945
2	Etau de fixation	1002832
2	Tige statif, 1000 mm	1002936
1	Tige statif, 470 mm	1002934
4	Noix universelle	1002830
2	Cordon HF, BNC / douille 4 mm	1002748
1	3B NET*log*™ (230 V, 50/60 Hz)	1000540 ou
	3B NET*log*™ (115 V, 50/60 Hz)	1000539
1	3B NET*lab*™	1000544

2

GENERALITES

Lorsque deux pendules couplés oscillent, de l'énergie va et vient entre les deux pendules. Si les deux pendules sont identiques et qu'ils sont excités de manière à ce qu'un pendule soit au repos au début, tandis que l'autre oscille, la transmission d'énergie est totale. C'est-à-dire qu'un pendule est entièrement au repos, tandis que l'autre oscille avec une amplitude maximale. La durée entre les deux arrêts d'un pendule ou, d'une manière générale, entre deux moments où le pendule oscille avec une amplitude minimale, est la période de battement T_Δ.

Les oscillations entre deux pendules mathématiques identiques couplés peuvent être décrites comme superposition de deux oscillations propres. On peut observer ces oscillations propres en excitant les deux pendules à des oscillations en phase ou en opposition de phase. Dans le premier cas, les pendules sans influence du couplage oscillent à la fréquence des pendules non couplés ; dans le second cas, sous l'influence maximale du couplage, ils oscillent à la fréquence propre maximale. Toutes les autres oscillations peuvent être représentées comme des superpositions de ces deux oscillations propres.
On obtient pour le mouvement des pendules l'équation suivante :

(1)
$$L\cdot\varphi_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) = 0$$
$$L\cdot\varphi_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0$$

g: Accélération de la pesanteur, L : Longueur de pendule, k : Constante de couplage

Pour les grandeurs auxiliaires $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ et $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ (arbitraires dans un premier temps), on obtient les équations suivantes :

(2)
$$L\cdot\varphi_+ + g\cdot\varphi_+ = 0$$
$$L\cdot\varphi_- + (g+2k)\cdot\varphi_- = 0$$

Leurs solutions

(3)
$$\varphi_+ = a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)$$

avec les fréquences angulaires

(4)
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}}$$

correspondent aux oscillations propres décrites en cas d'excitation en phase ou en opposition de phase ($\varphi_+ = 0$ en phase et $\varphi_- = 0$ en opposition de phase).
Les mouvements des pendules peuvent être calculés à partir de la somme ou la différence des deux grandeurs auxiliaires. On obtient la solution

(5)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) + a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) - a_-\cdot\cos(\omega_- t) - b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

Dans un premier temps, les paramètres a_+, a_-, b_+ et b_- sont des grandeurs quelconques qui peuvent être calculées depuis l'état d'oscillation des deux pendules au moment $t = 0$.

Le cas le plus simple à interpréter est le suivant : au moment 0, le pendule 1 en position zéro possède une vitesse angulaire initiale ψ_0, tandis que le pendule 2 en position zéro est au repos.

(6)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

L'équation suivante s'applique alors aux vitesses des deux pendules :

(7)
$$\varphi_1 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$$

Après la conversion mathématique, on obtient

(8)
$$\varphi_1 = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$

avec (9)
$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$$

Cela correspond à une oscillation des deux pendules avec la même fréquence angulaire ω, leurs amplitudes de vitesse ψ_1 et ψ_2 étant modulées avec la fréquence angulaire ω_Δ:

(10)
$$\psi_1(t) = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)$$
$$\psi_2(t) = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)$$

EVALUATION

L'équation (4) permet de calculer les périodes d'oscillation T_+ et T_- de l'oscillation en phase et de l'oscillation en opposition de phase :

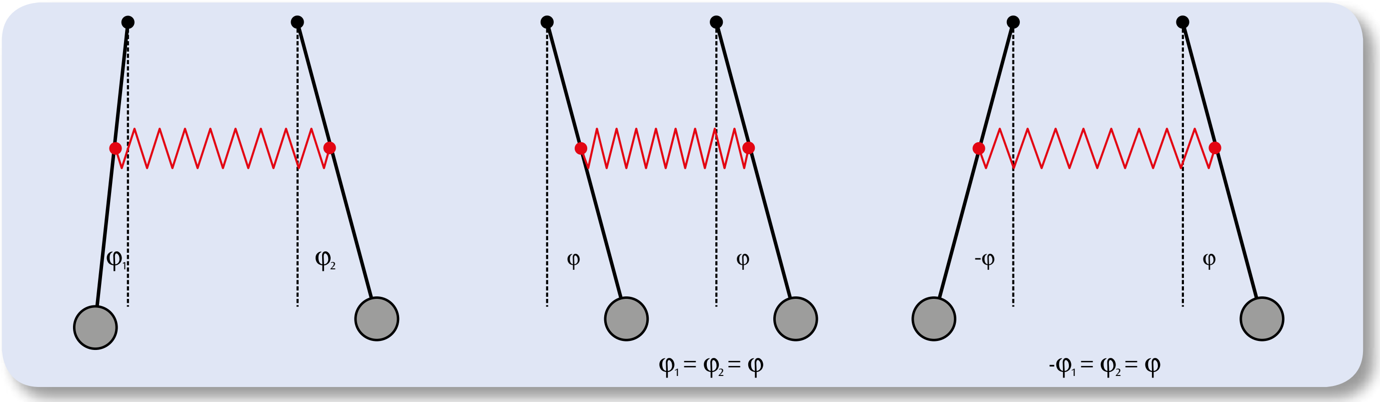
$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{et} \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Pour la période d'oscillation T de l'oscillation couplée, l'équation (9) engendre :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-} \quad \text{et ainsi} \quad T = 2\cdot\frac{T_+\cdot T_-}{T_- + T_+}$$

Habituellement, la modulation d'amplitude décrite dans l'équation (10) est caractérisée par la période de battement T_Δ, qui correspond à la durée s'écoulant entre deux arrêts des pendules :

$$\frac{2\pi}{2T_\Delta} = \omega_\Delta = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+} \quad \text{et ainsi} \quad T_\Delta = \frac{T_+\cdot T_-}{T_+ - T_-}$$



Oscillation couplée générale — Oscillation couplée en phase — Oscillation couplée en opposition de phase